選点直交Waveletと離散Wavelet変換(科学技術における数値計算の理論と応用II)

秦野, 和郎

数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 135-144

選点直交 Wavelet と離散 Wavelet 変換

愛知工業大学・電子工学科　秦野　和郎 (Kazuo Hatano)

1. はじめに

データ解析の分野ではこれまで主として Fourier 変換に基づく方法が使われてきた．よく知られるように Fourier 変換は平均的なスペクトルしか与えない．従って定常的なスペクトル解析には適しているが，非定常的な信号，すなわち時々刻々周波数成分が変化するような信号のスペクトル解析には適さない．

このような用途に時間周波数解析と呼ばれる手法が注目されて来ている．Wavelet 変換に基づく手法はこのようなデータ解析を実現せしめる一つの方法である．実用上の要請に基づいて Wavelet 変換の手法は急速に発展してきている．初期には主に連続 Wavelet 変換が考察の対象であったが，これを離散化し，更に直交化させる手法が見いだされ局所的な台を持つ直交 Wavelet が開発された．直交 Wavelet は多重解像度解析なる概念を使って統一的に扱うことが出来る．多重解像度解析とは，線形空間 $L^2(\mathbf{R})$ を種々な分解能を持つ部分空間に分解することを言う．直交 Wavelet はこのような分解を実現する関数系と見ることができる．

$f(x)$ を線形空間 $L^2(\mathbf{R})$ の任意の要素とする．すなわち，

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}<\infty \tag{1.1}$$

であるとする．このとき多重解像度解析の考察に基づくと $f(x)$ を

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}A_l^{(q)}\phi_{q,l}(x)+\sum_{j=q}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}B_l^{(j)}\psi_{j,l}(x) \quad \text{又は,}\\ f(x)&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}B_l^{(j)}\psi_{j,l}(x) \quad , \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$A_l^{(j)}=2^j\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi_{j,l}(x)dx \quad , \quad B_l^{(j)}=2^j\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi_{j,l}(x)dx \tag{1.3}$$

と Wavelet 展開することができる．$A_l^{(j)}$，$B_l^{(j)}$ を Wavelet 係数と言う．$\phi_{j,l}(x)$ は scaling 関数，$\psi_{j,l}(x)$ は Wavelet 関数である．Wavelet 関数，$\psi_{j,l}(x)$ は適当な K に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^k\psi_{j,l}(x)dx=0 \quad : \quad k=0,1,\cdots,K-1 \tag{1.4}$$

を満たすように構成される．従って，式 (1.3) における $B_l^{(j)}$ の右辺は $f(x)$ の低次の多項式成分を消してしまうので，$f(x)$ が十分に滑らかな関数であれば，$B_l^{(j)}$ の絶対値は無視できる程度に小さくなる筈である．

多重解像度解析の手法に基づいて Wavelet 係数の間に成り立つ漸化式，

$$A_k^{(j+1)}=2\sum_{l=-\infty}^{\infty}(c_{k-2l}A_l^{(j)}+\check{c}_{k-2l}B_l^{(j)}) \tag{1.5}$$

及び,

$$A_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l A_{l+2k}^{(j)} \quad , \quad B_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{c}_l A_{l+2k}^{(j)} \tag{1.6}$$

を導くことができる. ここで, c_l は Wavelet Filter 係数であり, 引き続く少数個のみが零でない. 式 (1.6) を分解の式, 式 (1.5) を再構成の式と言う.

与えられた, $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対して, 適当な手段により

$$A_l^{(p)} = 2^p \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{p,l}(x)dx \quad : \quad l \in \mathbf{Z} \tag{1.7}$$

を求めることができるとする. このとき, 式 (1.6) を使って, $A_l^{(j)}, B_l^{(j)} : j = p-1, p-2, \cdots$ を計算することができる. このようにして計算される値は式 (1.3) で与えられる値に一致する. 式 (1.6) から分かるように $A_k^{(j-1)}, B_k^{(j-1)}$ の個数は $A_k^{(j)}$ の個数の半分程度である. 後述するように,

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,l}(x)dx = 1 \tag{1.8}$$

であるから式 (1.3) は $A_l^{(j)}$ をそれと同程度の大きさの $A_l^{(j-1)}$ と, 絶対値の小さい $B_l^{(j-1)}$ とに分離する. この分離過程を $j = p, p-1, \cdots, q$ に対して適用して $A_l^{(q)}, B_l^{(q)}, B_l^{(q+1)}, \cdots, B_l^{(p-1)}$ を得たとする. もし, $A_l^{(p)}$ の個数が 2^p 個程度であれば, この変換過程により $A_l^{(p)}$ を, $A_l^{(p)}$ と同程度の大きさを持つ, 2^q 個程度の, $A_l^{(q)}$ と, 絶対値の小さい $2^p - 2^q$ 個程度の $B_l^{(j)}$ とに変換できることになる. $q(q < p)$ を適切にとれば, これにより Wavelet 係数 $A_l^{(p)}$ を, より少ない個数の Wavelet 係数に近似的に置き替えることが出来る.

さて, $N = 2^p$ として, $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に関して, $f(r/N) : r \in \mathbf{Z}$ が与えられるとする. 与えられたこれらの値だけを使って, 式 (1.7) を計算することは出来ない. すなわち, 式 (1.6) を使うことはできない. そこで実用上, 式 (1.7) の代わりに

$$A_l^{(p)} = f(\frac{l}{N}) \quad : \quad l \in \mathbf{Z} \tag{1.9}$$

として, 式 (1.6) を適用する. この方法は, Mallat の算法 [1] と呼ばれており, データ圧縮などの用途に多くの分野で使われている. 単に離散 Wavelet 変換と言えばこの方法を指すこともある.

Mallat の算法は期待するような結果を与える良い方法であるが, 難点は, この方法が $f(x)$ に関連したどのような量を与えるかがわからない事である. 式 (1.3) で与えられる量の近似値が与えられるであろう程度の事しか分からない. この方法に対して, Donoho[2] が数学的な解析をしているが満足な結果は得られていない.

本稿では直交 Wavelet の変形である, 選点直交 Wavelet なる関数列を構成する. これを使うと Mallat の算法を合理的に説明できる.

2. 直交 Wavelet の scaling 関数と mother wavelet

第 1 章で述べたように, $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対する Wavelet 係数は二つの漸化式, 式 (1.5) 及び, 式 (1.6) を満たす. 本章ではこれらの漸化式を導く.

実関数 $\phi(x)$ に関して次の二つの式が成り立つとする. すなわち,

$$\phi(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(2x-k) \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m)dx = \delta_{m,0} \tag{2.1}$$

であるとする. このとき, 第一式にあらわれる c_k の満たすべき条件式を導く.
式 (2.1) 第二式の左辺に, 第一式を適用すると,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m)dx &= 4 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-l)\phi(2x-2m-k)dx \\ &= 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-2m-k+l)dx \end{aligned} \tag{2.2}$$

である. 式 (2.1) の第二式を使うと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-m)dx = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k+2m} = \delta_{m,0} \tag{2.3}$$

を得る. これが c_k の満たすべき条件である.
次に, $\check{K}$ を任意の整数として, 実関数 $\psi(x)$ を次のように導入する. すなわち,

$$\psi(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_{2\check{K}-1-k} \phi(2x-k) \tag{2.4}$$

とする. 後の記述の容易のために, $\check{c}_k = (-1)^k c_{2\check{K}-1-k}$ とおく. このとき, $\check{c}_k$ に関して

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{c}_k \check{c}_{k+2m} &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+k+2m} c_{2\check{K}-1-k} c_{2\check{K}-1-k-2m} \\ &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-2m} = \delta_{m,0} \end{aligned} \tag{2.5}$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{c}_{k+2m} c_k &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+2m} c_{2\check{K}-1-k-2m} c_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{2k} c_{2\check{K}-2k-2m-1} c_{2k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{2k-1} c_{2k-1} c_{2\check{K}-2k-2m} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

である. $\psi(x)$ に関しては,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi(x-m)dx &= 4 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{c}_l \check{c}_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-l)\phi(2x-2m-k)dx \\ &= 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{c}_l \check{c}_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-2m-k+l)dx = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{c}_{k+2m} \check{c}_k = \delta_{m,0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

なる直交性がある. 更に,

$$\text{(2.8)}\quad \begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\phi(x-m)dx &= 4\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{c}_l c_k\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-l)\phi(2x-2m-k)dx\\ &= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{c}_{k+2m}c_k = 0\end{aligned}$$

である. また,

$$\text{(2.9)}\quad \begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\psi(2x-m)dx = 2\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_l\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-l)\psi(2x-m)dx = 0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\psi(2x-m)dx = 2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\check{c}_l\int_{-\infty}^{\infty}\phi(2x-l)\psi(2x-m)dx = 0\end{cases}$$

等も容易にわかる.

$$\text{(2.10)}\quad \phi_{j,k}(x)=\phi(2^j x-k)\quad,\quad \psi_{j,k}(x)=\psi(2^j x-k)$$

とおく. 式 (2.1) の第一式及び, 式 (2.4) から,

$$\text{(2.11)}\quad \phi_{j,l}(x)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\phi_{j+1,k+2l}(x)\quad,\quad \psi_{j,l}(x)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{c}_k\phi_{j+1,k+2l}(x)$$

を容易に得ることができる. 次に,

$$\text{(2.12)}\quad h_j(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}A_l^{(j)}\phi_{j,l}(x)\quad,\quad g_j(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}B_l^{(j)}\psi_{j,l}(x)$$

とおくと,

(2.13)

$$\begin{aligned}h_j(x)+g_j(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}A_l^{(j)}\phi_{j,l}(x)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}B_l^{(j)}\psi_{j,l}(x)\\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}A_l^{(j)}\cdot 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\phi_{j+1,k+2l}(x)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}B_l^{(j)}\cdot 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{c}_k\phi_{j+1,k+2l}(x)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(c_{k-2l}A_l^{(j)}+\check{c}_{k-2l}B_l^{(j)}\right)\right\}\phi_{j+1,k}(x)\end{aligned}$$

である. ここで

$$\text{(2.14)}\quad A_k^{(j+1)}=2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(c_{k-2l}A_l^{(j)}+\check{c}_{k-2l}B_l^{(j)}\right)$$

とおくと, 式 (2.13) は

$$h_j(x) + g_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(j+1)} \phi_{j+1,k}(x) = h_{j+1}(x) \tag{2.15}$$

となる. これを反復すると,

$$h_p(x) = h_q(x) + \sum_{j=q}^{p-1} g_j(x) \quad : \quad q < p \tag{2.16}$$

なる公式が得られる. すなわち,

$$h_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(p)} \phi_{p,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(q)} \phi_{q,k}(x) + \sum_{j=q}^{p-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k^{(j)} \psi_{j,k}(x) \tag{2.17}$$

である. 上式に現れる関数は次の直交性を満たす. すなわち

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,l}(x)\phi_{j,k}(x)dx = \frac{1}{2^j}\delta_{k,l} \quad , \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,l}(x)\psi_{j,k}(x)dx = \frac{1}{2^j}\delta_{k,l} \quad , \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,l}(x)\psi_{j,k}(x)dx = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

である. 又, $j < j'$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,l}(x)\psi_{j',k}(x)dx = 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,l}(x)\psi_{j',k}(x)dx = 0 \tag{2.19}$$

なる関係式が得られる. これらの直交性を使うと,

$$\begin{cases} A_k^{(j)} = 2^j \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_p(x)\phi_{j,k}(x)dx \quad : \ j = p, q \quad , \\ B_k^{(j)} = 2^j \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_p(x)\psi_{j,k}(x)dx \quad : \ j = q, q+1, \cdots, p-1 \end{cases} \tag{2.20}$$

となる. 次に, 上式に式 (2.11) を適用すると,

$$\begin{aligned} A_k^{(j)} &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} h_p(x) \cdot 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \phi_{j+1,l+2k}(x)dx \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \cdot 2^{j+1} \int_{-\infty}^{\infty} h_p(x)\phi_{j+1,l+2k}(x)dx = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l A_{l+2k}^{(j+1)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

となる. $B_k^{(j)}$ についても同じような式を得ることが出来る. すなわち,

$$A_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l A_{l+2k}^{(j)} \quad , \quad B_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{c}_l A_{l+2k}^{(j)} \tag{2.22}$$

である. これが第一章にあらわれた式 (1.6) である.

$q < p$ として, 与えられた関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ を

$$h_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(p)} \phi_{p,k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(q)} \phi_{q,k}(x) + \sum_{j=q}^{p-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k^{(j)} \psi_{j,k}(x) \tag{2.23}$$

により最小自乗近似する.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) - h_p(x)\}^2 dx \tag{2.24}$$

を最小にする条件は, 直交性から

$$\begin{cases} A_k^{(j)} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{j,k}(x)dx & : j = p, q \quad , \\ B_k^{(j)} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)dx & : j = q, q+1, \cdots, p-1 \end{cases} \tag{2.25}$$

である. 通常, Filter 係数, c_k は有限個であり,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^l \psi(x)dx = 0 \ : \ l = 0, 1, \cdots, K-1 \tag{2.26}$$

となるように決める. 従って第一章で述べたように, $f(x)$ が十分に滑らかならば, $B_k^{(j)}$ の絶対値は無視できる程度に小さくなる. $A_k^{(j)}$ の大きさは, $f(x)$ の大きさ程度である.

3. Wavelet 係数を計算する Mallat の算法

与えられた $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対して, 式 (2.25) で与えられる, Wavelet 係数 $A_k^{(j)}, B_k^{(j)}$ を得ることを Wavelet 変換, 又は分解と言い, 式 (2.23) により, Wavelet 係数から元の関数 $f(x)$ を得ることを Wavelet 逆変換, 又は再構成と言う. この際, 全部の Wavelet 係数を式 (2.25) を使って計算する必要はない.

まず, 十分に大きな p に対して, 式 (2.25) により $A_k^{(p)}$ を計算する. k の動く範囲は $f(x)$ の非零区間, Filter 係数の個数に依存する. 次に $j = p, p-1, \cdots$ に対して式 (2.22) を適用すれば極めて少ない計算量で Wavelet 係数を計算できる (Fast Algorithm). 逆変換については, 式 (2.14) を使う.

$f(x)$ の値が離散点上で与えられた時には, 式 (2.25) を使って $A_k^{(p)}$ を計算することは不可能である. $N = 2^p$ として $x = r/N \ : \ -\infty < r < \infty$ で $f(x)$ の値が与えられた時, すなわち, $f(r/N) \ : \ -\infty < r < \infty$ が与えられた時, Mallat は $A_k^{(p)}$ を計算するための次の方法を提案した.

最も基本的な Wavelet filter 係数は Daubechies の与えた Filter 係数である. 式 (2.26) の条件で算出された Filter 係数は $c_k \ : \ 0 \le k \le 2K-1$ のみが非零であり, 他はすべて零である. この時には,

$$\mathrm{supp}[\phi(x)] = \mathrm{supp}[\psi(x)] = [0, 2K-1] \tag{3.1}$$

である. $\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k)$ であるから,

$$\mathrm{supp}[\phi_{j,k}(x)] = \mathrm{supp}[\psi_{j,k}(x)] = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+2K-1}{2^j}\right] \tag{3.2}$$

となる. 従って j が十分に大きければ $\phi_{j,k}(x)$ の台の幅は十分に小さくなる筈である. 又,

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(x)dx = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k)dx = 1 \tag{3.3}$$

である. すなわち, 十分に大きな j に対しては $2^j \phi_{j,k}(x)$ は Dirac の delta 関数で近似できる. 式の形で書けば,

$$2^j \phi_{j,k}(x) \approx \delta\big(x - \frac{k}{2^j}\big) \tag{3.3}$$

である. 従って, 十分に大きな p に対して,

$$A_r^{(p)} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - \frac{r}{2^p})dx = f(\frac{r}{2^p}) = f(\frac{r}{N}) \tag{3.4}$$

となる.

このようにして, 初期値 $A_r^{(p)}$ を得ることが出来れば, 式 (2.22) を使って, 式 (2.23) に現れる Wavelet 係数を次々に計算して行くことが出来る. これが Mallat の算法である. Filter 係数にはここでの議論とは別の条件で与えられることもある. しかし, 別の Filter 係数についても全く同じ議論が可能である.

上で述べた手順からわかるように, この方法で得られる Wavelet 係数が, 式 (2.25) で与えられる値に一致するかどうかはわからない. 一般には一致しない筈である. 次章では Mallat の算法で計算される値がどのような値になるかを明らかにする.

4. 選点直交 Wavelet の scaling 関数と wavelet 関数

第 3 章で述べた直交 Wavelet は実軸上で定義される関数系である. ここでは実軸上の等間隔離散点上でのみ関数値が定義される, 選点直交 Wavelet を定義する. 導入される関数列により, 与えられたデータを最小自乗近似すると, 得られる離散 Wavelet 係数は Mallat の算法で得られる量に一致する.

さて, p を自然数とし, $N = 2^p$ とする.

[定義.1]　選点直交 Wavelet の scaling 関数, $\bar{\phi}_{j,k}(r/N)$: $r \in \mathbf{Z}$ を次のように定義する. すなわち,

$$\bar{\phi}_{p,k}(\frac{r}{N}) = \bar{\phi}_{p,0}(\frac{r}{N} - \frac{k}{N}) = \delta_{k,r} \tag{4.1}$$

とし, $j = p, p-1, \cdots$ に対して,

$$\bar{\phi}_{j-1,0}(\frac{r}{N}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{\phi}_{j,k}(\frac{r}{N}) \quad , \quad \bar{\phi}_{j,k}(\frac{r}{N}) = \bar{\phi}_{j,0}(\frac{r}{N} - \frac{k}{2^j}) \tag{4.2}$$

とする. 上の定義から又,

(4.3)

$$\bar{\phi}_{j-1,l}(\frac{r}{N}) = \bar{\phi}_{j-1,0}(\frac{r}{N} - \frac{l}{2^{j-1}}) = \bar{\phi}_{j-1,0}(\frac{r - 2^{p-j}\cdot 2l}{N}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\bar{\phi}_{j,k}(\frac{r-2^{p-j}\cdot 2l}{N})$$
$$= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\bar{\phi}_{j,0}(\frac{r-2^{p-j}\cdot 2l}{N} - \frac{k}{2^j}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\bar{\phi}_{j,0}(\frac{r}{N} - \frac{k+2l}{2^j})$$
$$= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\bar{\phi}_{j,k+2l}(\frac{r}{N})$$

である. この式は, 式 (2.11) の第一式に対応している. これに関してまず, 次の補題が成立する.

[補題.1]

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j,m}(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{j,n}(\frac{r}{N}) = \frac{1}{2^j}\delta_{m,n} \tag{4.4}$$

であると仮定する. このとき,

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j-1,m}(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{j-1,n}(\frac{r}{N}) = \frac{1}{2^{j-1}}\delta_{m,n} \tag{4.5}$$

が成り立つ.

[証明]　証明すべき式 (4.5) の左辺を変形する.

(4.6)

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j-1,m}(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{j-1,n}(\frac{r}{N}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l\bar{\phi}_{j,l+2m}(\frac{r}{N})\cdot 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\bar{\phi}_{j,k+2n}(\frac{r}{N})$$
$$= 4\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l c_k \sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j,l+2m}(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{j,k+2n}(\frac{r}{N})$$
$$= 4\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l c_k\cdot\frac{N}{2^j}\cdot\delta_{l+2m,k+2n} = 4\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l c_k\cdot\frac{N}{2^j}\cdot\delta_{l,k+2n-2m}$$
$$= 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k+2n-2m}\frac{N}{2^j} = \frac{N}{2^{j-1}}\delta_{n-m,0} = \frac{N}{2^{j-1}}\delta_{m,n}$$

となる. すなわち, 式 (4.5) が成り立つ.

[定理.1]　選点直交 Wavelet の scaling 関数, $\bar{\phi}_{j,k}(r/N)$: $r \in \mathbf{Z}$ に関して次の定理が成り立つ. すなわち, $j = p, p-1, \cdots$ に対して,

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j,m}(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{j,n}(\frac{r}{N}) = \frac{1}{2^j}\delta_{m,n} \tag{4.7}$$

が成り立つ. すなわち, 定義.1 で与えられる関数列は選点直交する.

[証明]　式 (4.1) から，

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{p,m}(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{p,n}(\frac{r}{N}) = \delta_{m,r}\delta_{n,r} = \delta_{m,n} \tag{4.8}$$

である．補題と組み合わせると定理が成り立つ．

[定義.2]　選点直交 Wavelet の wavelet 関数, $\bar{\psi}_{j,k}(r/N)$: $r \in \mathbf{Z}$ を次のように定義する．すなわち, $j = p, p-1, \cdots$ に対して,

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{j-1,0}(\frac{r}{N}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k c_{2K-1-k}\bar{\phi}_{j,k}(\frac{r}{N}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{c}_k\bar{\phi}_{j,k}(\frac{r}{N}) \quad , \\ \bar{\psi}_{j-1,k}(\frac{r}{N}) = \bar{\psi}_{j-1,0}(\frac{r}{N} - \frac{k}{2^{j-1}}) \end{cases} \tag{4.9}$$

とする．この定義から, 又

$$\bar{\psi}_{j-1,l}(\frac{r}{N}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{c}_k\bar{\phi}_{j,k+2l}(\frac{r}{N}) \tag{4.10}$$

である．これは, 式 (2.11) の第二式に対応する．これに関して次の定理が成り立つ．

[定理.2]　選点直交 Wavelet の wavelet 関数, $\bar{\psi}_{j,k}(r/N)$: $r \in \mathbf{Z}$ に関して次の定理が成り立つ．すなわち, $j = p-1, p-2, \cdots$ に対して,

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\psi}_{j,m}(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j,n}(\frac{r}{N}) = \frac{1}{2^j}\delta_{m,n} \tag{4.11}$$

が成り立つ．

[証明]　式 (4.7) の証明と殆ど同じであるから省略する．

[定理.3]　次の定理が成り立つ．すなわち, $j = p-1, p-2, \cdots$ に対して,

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j,m}(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j,n}(\frac{r}{N}) = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j-1,m}(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j,n}(\frac{r}{N}) = 0 \quad , \quad \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\psi}_{j-1,m}(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j,n}(\frac{r}{N}) = 0 \tag{4.13}$$

等が成り立つ．又, $j < j'$ のとき,

$$\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{j,m}(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j',n}(\frac{r}{N}) = 0 \quad , \quad \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\bar{\psi}_{j,m}(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j',n}(\frac{r}{N}) = 0 \tag{4.14}$$

である．式 (2.12) と同じように，

$$\bar{h}_j(\frac{r}{N}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{A}_l^{(j)}\bar{\phi}_{j,l}(\frac{r}{N}) \quad , \quad \bar{g}_j(\frac{r}{N}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{B}_l^{(j)}\bar{\psi}_{j,l}(\frac{r}{N}) \tag{4.15}$$

とおくと，式 (2.14)，式 (2.22) に対応して，

$$\bar{A}_k^{(j+1)} = 2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(c_{k-2l}\bar{A}_l^{(j)} + \check{c}_{k-2l}\bar{B}_l^{(j)}\right) \tag{4.16}$$

$$\bar{A}_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l\bar{A}_{l+2k}^{(j)} \quad , \quad \bar{B}_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{c}_l\bar{A}_{l+2k}^{(j)} \tag{4.17}$$

等を得ることが出来る．

$q < p$ として，与えられた関数 $f(\frac{r}{N})$ を

$$\bar{h}_p(\frac{r}{N}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{A}_k^{(p)}\bar{\phi}_{p,k}(\frac{r}{N}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{A}_k^{(q)}\bar{\phi}_{q,k}(\frac{r}{N}) + \sum_{j=q}^{p-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{B}_k^{(j)}\bar{\psi}_{j,k}(\frac{r}{N}) \tag{4.18}$$

により最小自乗近似する．

$$J = \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left\{f(\frac{r}{N}) - \bar{h}_p(\frac{r}{N})\right\}^2 \tag{4.19}$$

を最小にする条件は，直交性から

$$\begin{cases} \bar{A}_k^{(p)} = f(\dfrac{k}{N}) & , \\ \bar{A}_k^{(j)} = \dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(\frac{r}{N})\bar{\phi}_{j,k}(\frac{r}{N}) & : j = q \quad , \\ \bar{B}_k^{(j)} = \dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(\frac{r}{N})\bar{\psi}_{j,k}(\frac{r}{N}) & : j = q, q+1, \cdots, p-1 \end{cases} \tag{4.20}$$

である．上式の第一式に示されるように，$A_k^{(p)}$ としては与えられたデータをそのまま与えればよい．従って，Mallat の算法で得られる量は，式 (4.20) の第二，第三式の右辺となることがわかる．

5. おわりに

ここでは，データ個数が無限個の時についてだけ議論しているが，データ個数が有限個の時には別に検討を要する．これについては今後の検討課題としたい．

[参考文献]　[1] Bernard Delyon, Anatoli Juditsky : Estimating Wavelet Coefficients , *in* Anestis Antoniadis , Georges Oppenheim (eds.) Wavelet and Statistics , Springer-Verlag , pp.151-168 , (1995).
[2] Donoho, D : Interpolating Wavelet Transforms , Dept. of Statistics, **ftp plaifair.stanford.edu**, 1993.